муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Школа № 12 имени Героя Советского Союза Ф.М. Сафонова»
городского округа Самара

Российская Федерация, 443041, г. Самара, ул. Красноармейская, 93-А
Тел./ факс: (846) 332-45-46; e-mail: inform 12 @mail.ru

«РАССМОТРЕНО»	«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДЕНО»
Протокол заседания МО учителей ____ от «26» августа 2016 г. № 1 Председатель МО ____	Протокол заседания МС школы от «29» августа 2016г. № 1 Зам.директора по УВР ____	Директор школы ____ Е.В.Горячева Приказ по школе №640 от «29» августа 2016г.

Рабочая программа

элективного курса по предмету «Математика»

«Задачи с параметрами»

10-11 класс

Количество часов: 68 ч.
Количество часов в неделю:
10 класс – 1 час в неделю (34 часа в год)
11 класс – 1 час в неделю (34 часа в год)

Составила:
учитель математики высшей категории

Смирнова И.А.

Самара
2016-2017
учебный год

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Необходимость перехода старшей школы на профильное обучение определена Правительством России в «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года», где ставится задача профильного обучения в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию учащихся, отработки гибкой системы профилей. Принятая в концепции гибкая система профильного обучения предусматривает возможность разных учебных курсов, в том числе элективный курс.

Специфика преподавания математики в старших классах во многом определяется еще и тем, что экзамен по математике (в данное время по алгебре и началам анализа) является обязательным для всех школьников. В настоящее время этот экзамен в значительном числе школ России проводится в виде ЕГЭ, скорее всего эта форма возобладает над другими. ЕГЭ по математике — процедура серьезная, требующая специальной подготовки. Преподаватель математики отчетливо осознает, что большинству его питомцев нужна хорошая оценка не только по «школьной составляющей» ЕГЭ, но и по всем компонентам.

Математику, в отличие от других предметов, сдают в большинстве высших учебных заведений независимо от того, какие это учебные заведения (математические, естественно - научные, технические, экономические, военные). Если раньше учитель математики мог отстраниться от вопроса сдачи его выпускниками вступительных экзаменов в ВУЗ и сосредоточиться на выпускном экзамене в школе, то с введением ЕГЭ на учителя математики явно или неявно возлагается еще большая ответственность. Поэтому абсолютное большинство учителей будет заинтересовано в ведении элективных курсов. Многие преподаватели математики захотят использовать элективные курсы для закрепления содержания основной программы и/или прагматической подготовки к ЕГЭ. В любом курсе должна наличествовать прагматическая составляющая, поскольку изучение любого раздела математики связано с глобальным ее знанием. [2]

Особое внимание при подготовке к ЕГЭ занимают задачи, содержащие модуль и параметр, которые встречаются в части 3, с развёрнутым ответом. Задачи помогают проверить у учащихся умение строить логические цепочки рассуждений, проверяют технику владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, уровень логического мышления учащихся и их математической культуры.

Актуальность введения данного элективного курса обусловлена тем, что существует противоречие между наличием в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ заданий с параметрами (в том числе с развёрнутыми ответами) и отсутствием в школьном курсе алгебры системы заданий по данной теме, задачи с параметрами рассматриваются редко. На школьных экзаменах эти задания всегда вызывают трудность. В связи с этими проблемами возникла необходимость в разработке и внедрении в учебный план элективного курса «Задачи с параметрами»

Программа элективного курса «Задачи с параметрами» в объёме 68 часов рассчитана на учащихся 10-11 классов, определивших собственный выбор пути обучения (т.е. в группе, изучающей математику на профильном уровне). Элективный курс рассчитан на два года обучения, 1 час в неделю.

Цель курса

Цель изучения элективного курса – научить учащихся решать задачи с параметрами, а также анализировать, сопоставлять, устанавливать зависимости между величинами, выбирать оптимальные решения.

Требования, предъявляемые к элективному курсу

- углубить знания по теме «Решение уравнений и неравенств» (линейных, квадратных, показательных, логарифмических, тригонометрических, иррациональных);

- развивать математические способности учащихся.

Курс «Задачи с параметрами» дополняет школьный курс математики, является информационной поддержкой выбранного профиля дальнейшего образования. В ходе изучения учащиеся реализуют познавательные интересы и получают необходимые знания и умения, получают возможность практического применения своих интеллектуальных, организаторских способностей, развивают коммуникативные способности, овладевают умениями, связанными работой со справочной литературой.

Усвоение курса и процесс его изучения становятся средствами, которые обеспечивают переход от обучения к самообразованию.

Задачи курса

Познакомить с приёмами решения задач с параметрами.

Обучить старшеклассников решению задач, способам анализа информации.

Помочь в подготовке к сдаче ЕГЭ.

Повысить уровень математической подготовки выпускников.

Ожидаемые результаты

Сформировать у учащихся первичные навыки решения задач с параметрами.

Расширить кругозор учащихся.

Достичь повышения уровня самостоятельности и индивидуальности учащихся при работе с учебным материалом, уметь обосновывать свою точку зрения.

При проведении курса могут быть использованы следующие формы:

- индивидуальная;
- групповая;
- коллективная (через лекции, практикумы по решению задач, доклады, практические работы, рефераты).

Оценка знаний

Образовательные результаты изучения данного курса могут быть выявлены в рамках контроля.

Текущий контроль (активность и качество работы ученика на занятии.)

Тематический контроль (проверочные работы, контрольные работы)

Обобщающий контроль в форме презентации достижений учащегося (устные и письменные сообщения, практическая работа, рефераты)

Умение решать задачи один из показателей уровня математического развития ученика, глубина освоения учебного материала. Владение приёмами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня логического мышления. Решение задач с параметрами аналитически, графически открывают перед учащимися многие эвристические приемы общего характера, применяемые в исследованиях, решениях задач в другом математическом материале.

Тематическое планирование курса

№	тема	Краткое содержание	урок	часы
1	Введение. Знакомство с параметрами	Различные виды уравнений, способы решения уравнений.	лекция	1
2	Линейные уравнения и неравенства	Определение линейного уравнения, неравенства. Решение линейных уравнений с параметром, решение линейных неравенств с параметром. Решение уравнений, приводимых к линейным. Способы решения систем уравнений и неравенств. Исследование ответа.	лекция	1
3	Линейные уравнения и неравенства	Решение линейных уравнений с параметром, решение линейных неравенств с параметром. Исследование ответа.	практикум	2
4	Системы линейных уравнений и неравенств	Решение систем линейных уравнений и неравенств с параметром.	практикум	1
5	Дробно-рациональные уравнения и неравенства	Определение дробно-рационального уравнения. Неравенства. Решение дробно-рационального уравнения, неравенства с параметром. Исследование корней дробно-рационального уравнения.	лекция	1
6	Дробно-рациональные уравнения	Решение дробно-рациональных уравнений параметром.	практикум	2
7	Дробно-рациональные неравенства	Метод интервалов. Решение дробно-рациональных неравенств с параметром.	практикум	2
8	Контрольная работа №1			2
9	Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным уравнениям	Квадратные уравнения, неполные квадратные уравнения; исследование корней квадратного уравнения в зависимости от дискриминанта; теорема Виета, обратная теорема Виета; исследование квадратного трёхчлена. Способы решения а)аналитический, б)графический	лекция	1

10	Квадратные уравнения с параметром и уравнения с параметром, приводимые к квадратным уравнениям	Решение квадратных уравнений с параметром. Исследование корней квадратного уравнения с параметром.	практикум	6
11	Квадратные неравенства с параметром	Решение квадратных неравенств с параметром.	практикум	3
12	Контрольная работа №2			2
13	Иррациональные уравнения и неравенства	Решение иррациональных уравнений и неравенств с параметром; область допустимых значений; исследование ответа	лекция практикум	1 3
14	Логарифмические и показательные уравнения	Показательная и логарифмическая функции; свойства логарифмической и показательной функций; свойства степеней; решение логарифмических и показательных уравнений	лекция	1
15	Логарифмические и показательные уравнения	Решение показательных и логарифмических уравнений с параметром.	практикум	4
16	Логарифмические и показательные неравенства	Решение показательных и логарифмических неравенств с параметром	практикум	4
17	Контрольная работа №3			2
18	Тригонометрические уравнения и неравенства	Тригонометрические функции; графики тригонометрических функций; свойства (область значений); тригонометрические уравнения.	лекция	1
19	Тригонометрические уравнения и неравенства	Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.	практикум	5
20	Графическое решение уравнений и неравенств	Графики функций y=f(x), y=f(x-a), y=f(x)+b, y=kf(x), y=f(kx), y=f(ixi), y=If(x)I; свойства функций(область определения, область значений, чётность, нечётность функций, монотонность)	лекция	1

21	Графическое решение уравнений и неравенств	Решение графически уравнений и неравенств с параметром.	практикум	3
22	Применение производной при решении некоторых задач с параметрами	Производные функций; таблица производных; исследование функций с помощью производной; решение задач с параметрами с помощью производной.	практикум	3
23	Контрольная работа №4			2
24	Различные задачи с параметрами	Решение различных нестандартных задач с параметром	практикум	6
25	Резерв			4

Содержание курса

Введение. Знакомство с параметрами

В экзамене встречаются два типа задач с параметрами. Первый «для каждого значения параметра найти все решения некоторого уравнения или неравенства». Второй «найти все значения параметра, при каждом из которых решение уравнения или неравенства удовлетворяют заданным условиям». Соответственно и ответы в задачах этих двух типов различаются по существу, в задачах первого типа ответ выглядит так: перечисляются все возможные значения параметра и для каждого из этих значений записываются решения уравнения. В ответах задачам второго типа перечисляются все значения параметра, при которых выполнены условия задачи. Многие воспринимают параметр как «обычное» число, не задумываясь о том, что параметр, в действительности, являясь числом, может принимать различные значения.

Решить уравнение (неравенство) с параметром - значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех решений данного уравнения (неравенства).

Линейные уравнения

Пример 1

$$ax – 2x = a^2 + a – 6$$

$$(a – 2)x = a^2 + a – 6$$

линейное уравнение, число корней которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент при x или отличен от нуля.

Если $a – 2 \neq 0$, т.е. $a \neq 2$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{a^2 + a - 6}{a - 2}$$

$$x = \frac{(a-2)(a+3)}{a-2} = a + 3$$

если $a-2 = 0$, т.е. $a = 2$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, в этом случае любое число является корнем уравнения

Ответ: $a + 3$, при $a \neq 2$

любое число при $a = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$(a^2 - 4)x = a + 2$

1) если $a^2 - 4 = 0$

$a = 2, a = -2$

$(a + 2)(a - 2)x = a + 2$

$0 \cdot x = 4$ — решений нет

$0 \cdot x = 0$ — любое число

2) если $a^2 - 4 \neq 0$

$$x = \frac{a+2}{(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

Ответ: если $a =- 2$, то x — любое число,

если $a = 2$, то решений нет

если $a \neq \pm 2$, то $x = \dfrac{1}{a-2}$

№1 Решите относительно x уравнение:

а) $ax = a + 6$

б) $c(c - 2)x = c^2 - 4$

в) $p2x - 3px = p^2 - 9$

г) $ax + 5a = 30 + 6x$

д) $ax + 8x = a^2 + 6a - 16$

е) $b^2x - x = b^2 + 4b - 5$

ж) $cx + x(2 - 5c) = 1 - 2c$

з) $(a^2 + 1)x + a(a - 2x) = 1$

и) $(a^2 - 5a + 6)x = a^4 - 16$

к) $ax - 4 = 3x$

л) $2a(a - 2)x = a - 2$

м) $(a^2 - 9)x = a - 3$

№2 При каких значениях параметра *b* уравнение

$\frac{5x}{6} - b = \frac{1}{3}$ имеет

а) положительный корень

б) корень, принадлежащий промежутку (-1; 4]

в) корень, находящийся вне промежутка [-2; 6]

№ 3. При каких значениях параметра *a* уравнение

а) ах2 + 6 = 12 – ах имеет положительный корень

б) ах + 8 = 7а2х – 4 имеет отрицательный корень

Дробно-рациональные уравнения

Общий прием решения дробно-рациональных уравнений с числовыми коэффициентами известен. Чтобы решить такое уравнение, умножают обе его части на общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, решают полученное целое уравнение и исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей. Аналогичным образом поступают при решении дробно-рациональных уравнений с параметром.

Пример 1.

$$\frac{4}{x-3} - \frac{b}{2} = 2$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т.е. на $2(x - 3) \neq 0$

$8 - bx + 3b = 4x - 12$

$(4 + b)x = 20 + 3b$

- если $b + 4 = 0$, т.е. $b = -4$, то линейное уравнение корней не имеет, значит и не имеет корней и заданное дробно-рациональное уравнение.
- если $b + 4 \neq 0$, т.е. $b \neq -4$, то линейное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{20+3b}{b+4}$

Однако из условия следует, что $2(x-3) \neq 0$, т.е. $x \neq 3$ из данного дробно-рационального уравнения надо исключить те значения b, при которых $x = 3$.

$$3 = \frac{20+3b}{b+4}$$

$$20 + 3b = 3b + 12$$

$0b = 8$ неверно, т.е. таких значений нет.

Ответ: $b \neq -4$, то $x = \frac{20+3b}{b+4}$ — единственный корень

$b = -4$, то уравнение корней не имеет

№1. Решите относительно x уравнение:

$$x - 2a = \frac{1-a^2}{x}$$

$$x + 3 + \frac{2}{x} = 2a - \frac{a^2 - 3a}{x}$$

$$\frac{a}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

$$\frac{6}{x^2-16} - \frac{1}{x-4} = \frac{3a}{x+4}$$

№2. Решите относительно y уравнение:

$$\frac{5a}{y-a} - \frac{5y}{y+a} = 7$$

$$\frac{10-a}{y+3} + \frac{6}{y^2-9} = \frac{2}{y-3}$$

$$\frac{6-y}{y+2} - \frac{2}{y-a} + 1 = 0$$

$$\frac{3y}{2y-b} - \frac{4b}{y+b} - 1 = 0$$

№3. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{2}{1-x}=b-5$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит промежутку (–1; 1)?

№3. При каких значениях параметра a уравнение $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ имеет единственный корень?

Линейные и дробно-рациональные неравенства

Пример 1. Решить неравенство:

$(a – 1)x < 2$

При решении неравенства необходимо помнить, что при делении неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при делении на отрицательное число знак меняется.

$(a – 1)x < 2$

- $a – 1 = 0$

  $a = 1$

  $0 \cdot x < 2$

  x — любое число

- $a – 1 \neq 0$

  $a – 1 > 0$

  $a > 1$

  $x<\frac{2}{a-1}$

  $a – 1 < 0$

  $a < 1$

  $x>\frac{2}{a-1}$

Ответ: a = 1, то x — любое число

a > 1, то $x<\frac{2}{a-1}$

а < 1, то $x > \dfrac{2}{a-1}$

Пример 2. Найдите все значения параметра *а*, при которых множество решений неравенство $\dfrac{9-(a+6)x}{x^2} < \dfrac{3a}{x^2}\left(\dfrac{3}{x}-2\right)-1$ содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длиной 4 каждый

$$\frac{9-(a+6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2}\left(\frac{3}{x}-2\right)-1$$

$x \neq 0$. Домножим на x^4

$9x^2 - (a+6)x^3 < 9ax - 6ax^2 - x^4$

$x(9x - (a+6)x^2 - 9a + 6ax + x^3) < 0$

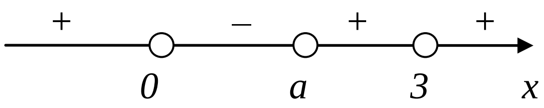
$x(9x - ax^2 - 6x^2 - 9a + 6ax + x^3) < 0$

$x(9(x-a) - 6x(x-a) + x^2(x-a)) < 0$

$x(x-a)(x^2 - 6x + 9) < 0$

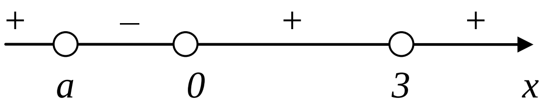
$x(x-a)(x-3)^2 < 0$

$x = 0, \quad x = a, \quad x = 3$

1) 

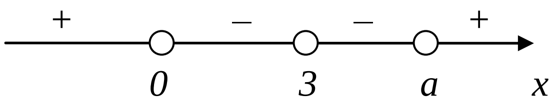
$0 < a < 3$

(0; а) не содержит числа *4*

2) 

$a < 0$

(а; 0) не содержит числа *4*

3) 

$a > 3$

(3; а) содержит число *4*

Ответ: если а ≥ 11, то х Є (0; 3)U (3; а)

№1. Решите неравенства

а) $ax < 1$

б) $|x + 3| > -a2$

в) $(a-1)\sqrt{x} \le 0$

г) $(x - a)(x - 2) \le 0$, при каких значениях а имеет единственное решение

д) $(x - a)^2(x - 2)(x - 3) \ge 0$, при каких значениях a решением будет отрезок

е) $(x - a)^2(x - 2)(x + 3) \ge 0$

ж) $x(x - a) < 0$

з) $(x - a)(x - 2a) < 0$

и) $(x - a)^2(x - 2a) < 0$

к) $(x - a)^2(x - 2a) \le 0$

л) $(x - a)^2(x + 4) \ge 0$, при каких значениях a решением будет луч

№2. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^2 + 8a < \frac{4a^2}{x} - x(x-2a-4)$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 2, но не содержит никакого отрезка длиной 3.

№3. Найдите все значения параметра a такие, что в множестве решений неравенства $x(x-2a-6)+12a < \frac{6a^2}{x} - a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной $2{,}5$ каждый, которые не имеют общих точек.

№4. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1-\frac{a}{x} < \frac{8}{x}(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2})$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

№5. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений $\frac{36-(a+12)x}{x^2} < \frac{12a}{x^2}(\frac{3}{x}-1)-1$ содержит число 7, а также содержит два непересекающихся отрезка, каждый из которых длиной 7.

№6. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x - 2) < (a + 1)(|x - 1| - 1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным *1,7* и положительным знаменателем.

Квадратные уравнения с параметром

Пример 1.

$3x2 – 6x + b = 0$

Найдем дискриминант этого уравнения $D = 36 – 12b$

Рассмотрим случаи: $D > 0; D < 0; D = 0.$

1) $36 – 12b > 0$

$12b < 36$

$b < 3$

В этом случае уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 12b}}{6} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{36 - 12b}}{6}$$

2) $36 – 12b = 0$

$b = 3$

$$x = \frac{6 - \sqrt{36 - 12 \cdot 3}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$ — Единственный корень

3) $36 – 12b < 0$

$b > 3$ — Уравнение корней не имеет

Для уравнения с параметрами иногда можно определить число корней при различных значениях параметров, оценить значения корней в зависимости от значений параметров

Найти при каких значениях параметра *а* биквадратное уравнение имеет четыре корня

$x^4 – (a+2)x^2 + 3a – 3 = 0$

введем новую переменную: $x^2 = y$

$y^2 – (a+2)y + 3a – 3 = 0$

данное биквадратное уравнение имеет четыре корня только, в тех случаях, когда полученное квадратное уравнение имеет два положительных корня

Найдем дискриминант

D = $(a+2)^2 – 4a(3a – 3) = a^2 + 4a + 4 – 12a + 12 = a^2 – 8a + 16 = (a – 4)^2$

Из теоремы, обратной теореме Виета, следует, что рассматриваемые квадратные уравнения имеет два положительных корня при значениях a, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (a-4)^2 > 0 \\ 3a - 3 > 0 \\ -(a+2) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq 4 \\ a > 1 \\ a > -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq 4 \\ a > 1 \end{cases}$$

биквадратное уравнение имеет четыре корня

Ответ: при $a \in (1\ ;4) \cup (4;\ +\infty)$

№1. При каких значениях параметра a имеет два корня уравнение:

а) $4x^2 – 2x + a = 0$

б) $ax^2 + 8x + 4 = 0$

в) $2x^2 + (a – 4)x – 2a = 0$

г) $3x^2 + (2a + 3)x + a +2 = 0$

№2. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $x^2 – tx + 36 = 0$

б) $tx^2 – 6x + 4 = 0$

в) $(t – 2)x^2 + tx – 1 = 0$

г) $tx^2 + (t – 6)x – 1 = 0$

№3. При каких значениях параметра b не имеет корней уравнение:

а) $3x^2 + 6x + 2b = 0$

б) $bx^2 – 16x + 8 = 0$

в) $bx^2 + (b – 4)x + b – 2 = 0$

г) $(b – 3)x^2 – 2(b – 9)x + b + 3 = 0$

№4. Решите относительно x уравнение:

а) $ax^2 – x = 0$

б) $x^2 + 4a = 0$

в) $ax^2 – 6 = 3x^2 – 2a$

г) $px^2 + 16 = 4x^2 + p^2$

д) $x^2 – 6x + a = 0$

е) $ax^2 + 4x – 2 = 0$

ж) $x^2 – 8x = c^2 – 8c$

з) $x^2 – 6a = a^2 + 6x$

Показательные уравнения и неравенства с параметрами

Пример 1.

Решить уравнение: $a^{2x+1} - 3a^{2x} - 4a^{2x-1} + 6 = 0$, $a > 0$

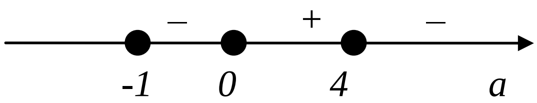
$a^{2x-1}(a^2 - 3a - 4) = -6$

Пусть $a^{2x-1} = t$, $t > 0$

1) $a = 1$ $\quad 1 \cdot (-6) = -6$ *решений бесконечное множество*

2) $a = 4; -1$ $\quad 0 \cdot t = 6$ *решений нет*

3) $a \neq 4;\ a \neq 1$ $\quad t = \dfrac{-6}{(a-4)(a+1)}$, t > 0



$\dfrac{-6}{(a-4)(a+1)} > 0$, итак $t > 0$ при $0 < a < 4,\ a \neq 1$

$$a^{2x-1} = \frac{-6}{(a-4)(a+1)}$$

$$2x - 1 = \log_a \frac{-6}{(a-4)(a+1)}$$

$$2x = \log_a \frac{-6}{(a-4)(a+1)} + 1$$

$$x = \log_a \sqrt{\frac{-6}{(a-4)(a+1)}} + \frac{1}{2}$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$ при $a = 1$,

нет решений при $a = 4; -1$

единственное решение $x = \log_a \sqrt{\frac{-6}{(a-4)(a+1)}} + \frac{1}{2}$

при $0 < a < 1, 1 < a < 4$

№1. При каких значениях параметра *a* уравнение имеет хотя бы один корень:

а) $16^x + (a + 3)4^x + 3a = 0$

б) $9^x + (a + 2)3^x + 2a = 0$

№2. Решите уравнения:

а) $a^{4x} + a^{2x} = a^{3x+1} + a^{x+1}, a > 0$

б) $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$

в) $a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a = 0$

г) $4^{2x+1} \cdot a^2 - 65 \cdot 4^{x-1} \cdot a + 1 = 0$

д) $4^x - 2^{x+1} - a = 0$

е) $e^{-2x} - 2e^{-x} = a$

№3. Решить неравенство:

а) $a^{x^2-x} \leq a^2, a > 0$

б) $2 - a^{x-3} < a^{2(x-3)}, a > 0$

в) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$

г) $a^2 \cdot 4^{x+1} - 33 \cdot 2^x \cdot a + 8 \geq 0$

№4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$9^{a+x} + 3^{2a+x} + 9^{a-x} + 3^{2a-x} \leq 4 \cdot 3^{3a+1}$

не имеет решений.

Логарифмические уравнения и неравенства с параметрами

Пример 1. При каких положительных значениях *a* уравнение

$$(log_3 a)x^2 – (2log_3 a – 1)x + log_3 a – 2 = 0$$

имеет единственный корень?

Возможны два случая.

1) $log_3 a = 0; a = 1;$ тогда имеем линейное уравнение $x – 2 = 0$,

$x = 2$ — единственный корень при $a = 1$.

2) $log_3 a \neq 0, a \neq 1$. Находим

$D = (2 log_3 a – 1)^2 – 4 log_3 a(log_3 a – 2) = 4 log_3 a + 1;$

равенство $4 log_3 a + 1 = 0$ является необходимым и достаточным условием существования единственного корня квадратного уравнения. Из этого равенства получаем, что $a = 3^{-\frac{1}{4}}$, т.е. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Ответ: 1; $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

№1. При каких положительных а уравнение имеет единственный корень

$$(log_4 a)x^2 + (2log_2 a + 1)x + log_4 a + 2 = 0$$

№2. При каких *a* графики функций имеют единственную точку:

а) $y = ln (3x – 4)$ и $y = 3x – 4 + a$;

б) $= ln (2x + 3)$ и $y = 2x + 3 + a$.

№3. Найдите все значения *a*, для которых при каждом $x \in (3; 9]$ значение выражения $log_3^2 x + 2log_3 x – 7$ не равно $alog_3 x$.

№4. Решить уравнение

а) $log_3(9^x + 9a^3) = x$;

б) $x – log_3(9^x – 2a) = 0$.

№5. Решить неравенства

а) $log_a(x – 1) + log_a x > 2$;

б) $log_a x + 1 > 2 log_x a$;

в) $log_{0,1}(x2 + 2x) < log_{0,1}(a + 1)$.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $3a \cdot 2^{a} - 4a^{2} \cdot 4^{a-3} - 27$ являются решениями неравенства

$$log_{x-5,5}(log_4 \frac{x-10}{x-13}) \geq 0$$

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3a \cdot 8^{a}$ и $2+12a \cdot 8^{a} - 72a^{2} \cdot 64^{a-0,5}$ являются решениями неравенства

$$log_{x-1,5}(log_5 \frac{x-11}{x-7}) \geq 0$$

№8. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $(a-2)log_3^{2}\ x - (a+1)log_3\ x^2 < 7a-36$ при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(3; 4)$.

№9. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству

$(2a+3)2^{2x} < (a+4)log_3 3^{2x} + 6a + 4$ при любом значении параметра a, принадлежащего промежутку $(-1; 1)$.

№10. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{2a-5}-2$ и $5a^2+6a\sqrt{2a-5}-2a^3-5$ являются решениями неравенства

$$log_{0,5x}(log_2 \frac{10}{\sqrt{5x+5}}) \leq 0$$

Тригонометрические уравнения и неравенства

Пример 1.

При каких значениях a уравнение $sin^2x + (a + 2)sin\ x + 3a + 1 = 0$ не имеет корней?

1 способ. Пусть $sin\ x = t,\ t \in [-1; 1]$; тогда, чтобы исходное уравнение не имело корней, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $t^2 + (a + 2)t + 3a + 1 = 0$

не имело решений, находящихся на отрезке $[-1; 1]$, или не имело решений вообще. Таким образом, возможны два случая.

1-й случай. $D < 0$;

$D = (a + 2)^2 - 4(3a + 1) = a^2 - 8a;$

$a^2 - 8a < 0; \quad 0 < a < 8$

2-й случай. $D \ge 0; \quad t \notin [-1; 1]; \quad a^2 - 8a \ge 0;$

$$\left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 8; \end{array}\right.$$

$$t_{1,2} = \frac{-(a+2) \pm \sqrt{a^2 - 8a}}{2}.$$

С учетом ограничений на t имеем три возможности. Зададим каждую из них аналитически и проиллюстрируем на рисунке.

Рассмотрим функцию $f(x) = t^2 + (a + 2)t + 3a + 1.$

1) $\begin{cases} f(-1) > 0, \\ t_B > 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(1) > 0, \\ t_B > 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0; \end{cases}$

Решим каждую из полученных систем.

1) $\begin{cases} 1 - a - 2 + 3a + 1 > 0 \\ -\dfrac{a+2}{2} < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a > 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad (a > 0),$

но, учитывая, что

$$\left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 8; \end{array}\right.$$

получаем $a \in [8; +\infty)$.

2) $\begin{cases} 1 + a + 2 + 3a + 1 > 0 \\ -\dfrac{a+2}{2} > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a > -1, \\ a < -4. \end{cases}$

Очевидно, что эта система не имеет решений.

3) $\begin{cases} 1-a-2+3a+1<0 \\ 1+a+2+3a+1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a<0, \\ a<-1 \end{cases}$ $(a < -1).$

Однако $\left[\begin{array}{l} a \le 0, \\ a \ge 8; \end{array}\right.$ поэтому $a \in (-\infty; -1)$.

Таким образом, объединяя все промежуточные результаты, находим

$a \in (-\infty; -1) \cup (0; 8) \cup [8; +\infty) = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

2 способ. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$a(3 + \sin x) = -2\sin x - 1 - \sin^2 x;$

$a(3 + \sin x) = -(\sin x + 1)^2.$

Так как $3 + \sin x \neq 0$, то $a = -\dfrac{(\sin x+1)^2}{3+\sin x}$.

Рассмотрим функцию $a(t) = -\dfrac{(t+1)^2}{t+3}$, $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$. Эта функция непрерывна и дифференцируема на отрезке [-1;1], причем

$$a'(t) = -\frac{2(t+1)(t+3)-(t+1)^2}{(t+3)^2} = \frac{(t+1)(t+1-2t-6)}{(t+3)^2} = \frac{(t+1)(-t-5)}{(t+3)^2}.$$

Следовательно, к ней применим алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений на отрезке [-1; 1]. Более того, так как функция a’(t) не имеет корней на промежутке (-1; 1), то наибольшее и наименьшее значения принимаются на концах отрезка [-1; 1]: $a(-1) = 0; a(1) = -1$.

Значит, при $a \in [-1; 0]$ существует хотя бы одно такое значение x, что $a = -\dfrac{(\sin x+1)^2}{3+\sin x}$, т.е. уравнение имеет корни. При $a \notin [-1; 0]$ таких значений x нет, т.е. данное уравнение корней не имеет.

№1. При каких значениях параметра а уравнение

$\cos 2x - (a-2)\cos x + 4a + 1 = 0$ не имеет корней?

№2. При каких значениях параметра $a \neq -3$ уравнение

$2\sin 2x = \dfrac{a-1}{a+3}$ не имеет корней?

№3. При каких значениях параметра $a \neq 2$ уравнение

$3sin3x = \frac{a+5}{a+2}$ не имеет корней?

№4. Найдите все значения а, при которых уравнение

а) $4sin^3 x = a – 3cos\ 2x$ не имеет корней;

б) $6sin^3 x = a – 5cos\ 2x$ не имеет корней;

в) $8sin^3 x = a – 7cos\ 2x$ не имеет корней.

№5. При каких значениях а выражение

$2 + cos\ x(3cos\ x + a\ sin\ x)$

не равно нулю ни при каких значениях x?

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа

$4sin\ a – 3$ и $8cos\ 2a + 16sin\ a + 1$ являются решениями неравенства

$$\frac{(21x-2x^2+65)\sqrt{x+2}}{log_3|x-9|-2} \geq 0$$

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа

$2cos\ a + 4$ и $2cos\ 2a – 8cos\ a + 5$ являются решениями неравенства

$$\frac{2-log_2|x-3|}{(75-5x-2x^2)\sqrt{x+5}} \leq 0$$

№8. Решите неравенства:

а) $sin\ (ax – 3) < a$

б) $cos(ax-\frac{\pi}{4}) \geq a$

Применение производной при решении некоторых задач с параметрами.

Пример 1.

а) Постройте график функции $y = x^4 – 2x^2 + 3$

б) при каких значениях параметра a уравнение $x^4 – 2x^2 + 3 = a$ имеет три корня?

Построим график функции $y = x^4 – 2x^2 + 3.$

Область определения функции *(-∞; +∞)*. Найдем точки пересечения с осями координат, для этого решим уравнение $x^4 – 2x^2 + 3 = 0$

Обозначим $x^2 = a$, тогда $a^2 – 2a + 3 = 0$, $D = – 8$, т.к. дискриминант отрицательный, то уравнение корней не имеет, т.е. точек пересечения с осью *0x* не имеет.

$x = 0$, то $y = 3$ — координаты точки пересечения с осью 0y.

Исследуем функцию с помощью производной:

$y' = 4x^3 – 4x$

$4x^3 – 4x = 0$

$4x(x^2 – 1) = 0$

$4x(x – 1)(x + 1) = 0$

$x = 0, \quad x = 1, \quad x = – 1$

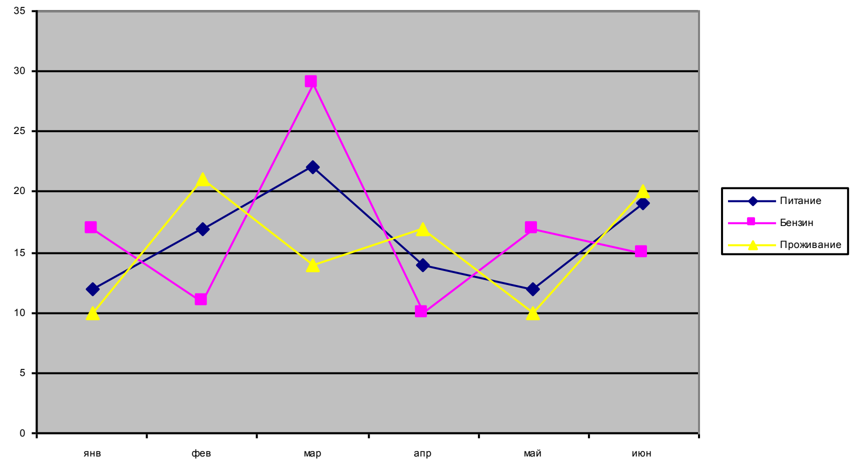
y' –   +   –   +

y ↓   -1   ↑   0   ↓   1   ↑ x

$x = –1, y = 2$ — координаты точки минимума

$x = 0, y = 3$ — координаты точки максимума

$x = 1, y = 2$ — координаты точки минимума



$y = a$, график прямая, параллельная оси *0x*, если $a = 3$, то уравнение $x^4 – 2x^2 + 3 = 0$ имеет три корня:

$x = – 2, \quad x = 0, \quad x = 2$

Ответ: если $a = 3$, то уравнение $x^4 – 2x^2 + 3 = 0$ имеет три корня.

Пример 2. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x, принадлежащем промежутку $(-6; -1]$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению $(a + 4)|x|$

$x^2 - 3 \neq (a + 4)|x|$

<u>1 способ</u>

$x \in (-6; -1]$, то $|x| = -x$

$x^2 - 3 \neq -(a + 4)x$

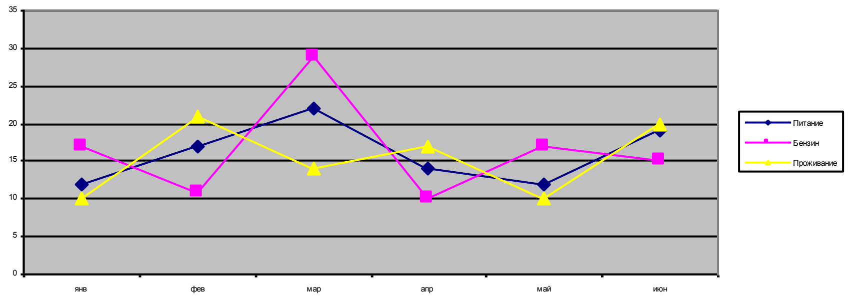
$x^2 + (a + 4)\,x - 3 \neq 0$

$f(x) = x^2 + (a + 4)\,x - 3$ квадратичная функция, график парабола, ветви вверх

$f(0) = -3$, то вершина ниже оси $0x$

$x_1 < 0$, $x_2 > 0$ корни разных знаков

$x_2 \in (-6; -1]$, то выполняется условие, есть корни уравнения



$$\begin{cases} f(-6) > 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-6) = 36 - 6a - 24 - 3 \\ f(-1) = 1 - a - 4 - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6a + 9 > 0 \\ -a - 6 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 1{,}5 \\ a \geq -6 \end{cases}$$

$a \in [-6; 1{,}5)$

чтобы $x_1 \notin (-6; -1]$ $\quad a \in (-\infty; -6) \cup [1{,}5; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -6) \cup [1{,}5; +\infty)$ оба корня принадлежат заданному промежутку

$(-6; -1]$, т.е. на этом промежутке $x^2 - 3 \neq (a + 4)|x|$

<u>2 способ</u>

$x^2 - 3 \neq -(a+4)x$

$$\frac{3-x^2}{x} \neq a+4$$

$$a \neq \frac{3-x^2}{x} - 4$$

Рассмотрим функции

$$f(x) = \frac{3-x^2}{x} - 4 = \frac{3}{x} - x - 4$$

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y = a$

Исследуем функцию

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 1 = \frac{-3-x^2}{x^2}$$

$$\frac{-3-x^2}{x^2} = 0$$

$x^2 = -3$ решений нет

$x = 0$

$f'(x)$ — —

$f(x)$ $\swarrow$ 0 $\swarrow$ x

для любого $x \in D(f)$ *$f'(x)<0$, значит функция убывает на всей области определения, т.к. $0 \notin (-6; 1]$ то функция $f(x)$ непрерывна на этом промежутке и убывает.*

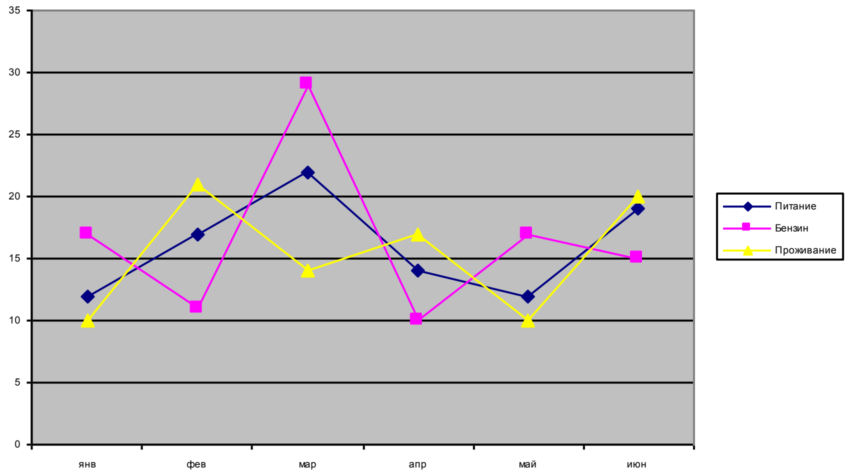
$f(-6)=1,5$

$f(-1)= -6$

$E(f)= (-6; 1,5]$

Построим эскиз графика функции $f(x) = \frac{3}{x} - x - 4$

$y = a$ прямая параллельная оси $0x$



Чтобы $x^2 - 3 \neq (a + 4)|x|$ на промежутке $(-6; -1]$ графики $f(x)$ и $y=a$ не должны пересекаться. Это условие выполняется при а $\in (-\infty; -6] \cup [1{,}5; +\infty)$

№1 Постройте график функции

а) $y = -x^4 + 2x^2 + 8$

б) При каких значениях параметра а уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней.

№2 Сколько корней имеет заданное уравнение при указанных ограничениях на параметр.

а) $x^3 - 3x^2 = a, \quad -4 < a < 0$

б) $-x^2 + 3x^2 - 2 = a, , \quad a < -2$

в) $3x^2 - x^3 = a, \; 0 < a < 4$

г) $x^3 - 3x^2 + 2 = a, \quad a > 2$

№3 При каких значениях параметра а

а) уравнение $x^3 - 3x = a$, имеет один корень

б) уравнение $3x - 3x^3 = a$ имеет три корня

№4 Найдите все значения, для которых при каждом $x \in (3;9]$ *значение выражения*

$$log_3^2 x + 2log_3 x - 7 \neq a \cdot log_3 x$$

№5 Решить уравнения

а) $\sqrt{x+1}=x+a$

б) $\sqrt{x-a}=2x-1$

Заключение

Умение решать задачи — один из показателей уровня математического развития ученика, глубина освоения учебного материала. Владение приёмами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня логического мышления. Решение задач с параметрами аналитически, графически открывают перед учащимися многие эвристические приемы общего характера, применяемые в исследованиях, решениях задач в другом математическом материале.

Введение элективного курса «Задачи с параметрами в школьный курс математики показало, что учащиеся могут самостоятельно овладевать новыми знаниями при подготовке сообщений, рефератов; учащиеся умеют решать задачи с параметрами, умеют анализировать, сопоставлять, устанавливать зависимости между величинами, выбирать оптимальные решения.

Достоинства элективного курса — это курс по выбору, поэтому ученики заинтересованы в посещении и подготовке к занятиям.

Литература для учителя

1. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами.-Москва-Харьков Гимназия, 2002
2. Единый государственный экзамен Математика 2001,2002,2003,2004,2005,2006. КИМ-Москва: Просвещение.
3. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В. Алгебра и начала анализа 8-11 классы. Пособие для школ и классов с углублённым изучением математики. 2-е издание М: Дрофа, 2001.
4. Каспржак А.Г.(под редакцией) Элективные курсы в профильном обучении- Национальный фонд подготовки кадров 2004
5. Крамор В.С, Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах.-М: Аркти, 2000
6. Макарова Е.Н. Профилизация учебного процесса, как способ построения образовательной реальности.-Профильная школа № 5, 2005 С.19
7. Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г., Нешков К.И.-Алгебра учебник для 9 класса с углубленным изучением математики –М: Мнемозина, 2002. С. 107-114.
8. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Математика методы решения задач.- М: Дрофа, 1995 С. 166-184.
9. Черкасов О. Ю., Якушев А.Г. Математика скорая помощь абитуриентам- М: 1995 С. 146-162.
10. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами – М: Просвещение. 1989

Литература для учеников

1. Галицкий М.Л., Гольман А.М., Звавич Л.И. Сборник по алгебре для 8-9 классов: Учебное пособие для учащихся школ иклассов с углубленным изучением математики. М: Просвещение,1994.
2. Единый государственный экзамен Математика 2001,2002,2003,2004,2005,2006, 2007, 2008. КИМ-М: Просвещение
3. Иванов А.П, Развивающая математика с тестами для 9-10 классов: Учебное пособие,6-е изд., перераб. И доп. Пермь: Изд-во Перм.университета,2003.
4. Крамор В.С, Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах.-М: Аркти, 2000
5. Макарычев Ю.Н, Миндюк Н.Г., Нешков К.И.-Алгебра учебник для 9 класса с углубленным изучением математики –М: Мнемозина, 2002. С. 107-114.
6. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Короткова Л.М.-Дидактические материалы по алгебре М: 1999
7. Чикунова О.И. Задачи с параметрами. Ч.1 (для 7-11 классов), Ч.2 (для 8-11 классов), Ч.3 (для 9-11 классов) — «Шадринский Дом Печати».